

Formalisme de Hamilton - Jacobi

On sait que si $K = \text{const} (= 0 \text{ pour simplicité})$, alors

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \end{cases} \quad \text{qui sont les équations les plus simples à résoudre.}$$

Alors on peut poser le problème suivant :

existe-t-elle une transformation canonique telle que $K = 0$?

Traditionnellement on la cherche de type $F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$ pour plusieurs raisons :

- 1) L'identité est $F_2(\{q_i\}, \{P_i\}) = \sum_i q_i P_i$ et a une forme particulièrement simple avec F_2

[Mais il faut rappeler que, donné F_2 , la même transformation peut être engendrée par F_1 , F_3 ou F_4 trouvées par transf. de Legendre.]

- 2) en va la voir dessous.

On va poser le problème :

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Mais

$$H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

↑ ici il faut substituer $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}$

et on obtient

$$H\left(\{q_i\}, \left\{\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right\}, t\right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$$

Puisque F_2 dépend seulement de $\{q_i\}$, $\{p_i\}$ et t ,
il s'agit d'une équation différentielle aux dérivées partielles
à résoudre en $\{q_i\}$ et t .

Sans se plonger dans la théorie des équations différentielles aux
dérivées partielles, on peut dire quelques chose :

pour chaque $\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$, l'intégration nécessite d'une constante
d'intégration :

$$\frac{df}{dx} \longrightarrow f(x) = \int_{x_0}^x \frac{df}{dx'} dx' + \underbrace{f(x_0)}_{\substack{\uparrow \text{il faut le} \\ \text{connaître}}}$$

$f(x_0)$ doit être une constante pour tous les valeurs de x , car

$$f(x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{df}{dx'} dx' + \underbrace{f(x_0)}_{\text{la même}} \xleftarrow{\text{change}} f(x_2) = \int_{x_0}^{x_2} \frac{df}{dx'} dx' + \underbrace{f(x_0)}_{\text{la même}}$$

Donc, si on traduit en F_2 , il veut dire que les constantes qu'on doit utiliser doivent être constantes pour toute la trajectoire.

Donc, on re-écrit

$$H(\{q_i\}, \left\{ \frac{\partial f}{\partial q_i} \right\}, t) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

on a appelé f la solution

et on a besoin de $3N+1$ constantes (une pour chaque $\frac{\partial}{\partial q_i}$ et une pour $\frac{\partial}{\partial t}$; si le système était en 2D on aurait $2N+1$ constantes, etc; si on avait 3D mais avec k contraintes, on aurait $3N-k+1$ constantes; en générale, on a besoin d'un nombre de constantes égal au nombre de degrés de liberté $+1$).

Important: la solution existe seulement si on a un nombre suffisant de constantes, qui doivent être constantes tout au long de la trajectoire: elles doivent être des constantes du mouvement!

D'abord on remarque que S entre dans l'équation seulement à travers ses dérivées. Donc on peut écrire

$$f(\{q_i\}, \{c_i\}, t) = S(\{q_i\}, \{c_i\}, t) + c_{3N+1}$$

$\uparrow$
 $i=1, \dots, 3N+1$

$\uparrow$
 $i=1, \dots, 3N$

mathématiquement elle est nécessaire pour définir de façon complète la solution, mais elle est, physiquement non-nécessaire!

Pour rappeler, la physique dépend seulement des dérivées de f , et donc la constante c_{3N+1} ne compte pas.

On revient sur la raison pour laquelle on choisit F_2
 (raison #2) : typiquement, H est non-linéaire en $\{p_i\}$ d'une
 façon simple (p_i^2) ; par contre elle peut être non-linéaire
 dans les $\{q_i\}$ de façon compliquée (dépende de la forme
 de $V(\{q_i\})$. Donc les dérivées partielles par rapport aux
 q_i interviennent de façon simple en F_2 mais les dérivées
 par rapport à $\frac{\partial}{\partial p_i}$ (qu'on utiliserait en F_3 et F_4)
 interviendrait par biais du potentiel : $V(\{\frac{\partial F}{\partial p_i}\})$, potentiellement
 compliqué.

Finalement, on revient à

$$H(\{q_i\}, \{\frac{\partial S}{\partial q_i}\}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

cette équation
est appelée

Equation de
Hamilton-Jacobi

La solution est $S(\{q_i\}, \{c_i\}, t)$, mais on sait que
 S est une " F_2 ", donc elle devrait être $S(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$.
 Mais on sait aussi que $K=0$ (par construction de Hamilton-
 Jacobi) et donc

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$Q_i = Q(0)$$

$$P_i = P_i(0)$$

$\leftarrow$

constantes de mouvement
donc on peut les
utiliser comme $\{c_i\}$!!!

On remet tout ensemble par biais d'un exemple :

l'oscillateur harmonique (1D)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Donc on peut procéder par séparation des variables
(car H ne dépend pas de t : système isolé !)

$$S_q(q, c) + S_t(t)$$

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{\partial S_t}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2}_{\text{dépend seulement de } q} = - \underbrace{\frac{\partial S_t}{\partial t}}_{\text{dépend seulement de } t}$$

↘ égales à une constante ↗

$$\left\{ \begin{array}{l} \overbrace{\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S_q}{\partial q} \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2}^H = E \\ - \frac{\partial S_t}{\partial t} = E \end{array} \right. \quad \leftarrow$$

H est conservée car système isolé !

Voici la constante nécessaire pour résoudre Hamilton-Jacobi et qui est une constante du mouvement.

Solution :

$$S_t = -Et + S_0$$

et

$$\frac{\partial S_q}{\partial q} = \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$$

ambiguïté de signe? ou physiquement raisonnable?

Rappelle que

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_q}{\partial q}$$

donc le $\pm$ nous dit qu'on peut avoir la même énergie cinétique ($p^2 \rightarrow \left(\frac{\partial S_q}{\partial q}\right)^2$) avec la même $|p|$ indépendamment du signe! Donc on peut choisir. On va l'utiliser dans quelques instant.

On repète :

$$\frac{\partial S_q}{\partial q} = \pm \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q^2}$$

et alors

$$S_q(q) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mE - m^2\omega^2 q'^2} dq' + S_q(\bar{q}, E)$$

↖ choix arbitraire compensée ici ↑

NOTE : $2mE - m^2\omega^2 q^2 = 2m\left(E - \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right) = 2mT > 0$

donc la racine est bien définie.

↑
énergie
cinétique

$$S_q(q) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2} dq' + S_q(\bar{q}, E)$$

Donc finalement on a

$$S(q, E, c_2, t) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q'^2} dq' - Et + \underbrace{S_t(0) + S_q(\bar{q}, E)}_{c_2}$$

$\uparrow$
 c_1

mais on sait que $S = S(q, P, t)$ car de type $\bar{F}_2$
 donc $P = E$, et finalement

$$S(q, P, t) = \pm \int_{\bar{q}}^q \sqrt{2mP - m^2 \omega^2 q'^2} dq' - Pt + \underbrace{S_t(0) + S_q(\bar{q}, P)}_{c_2 \text{ à négliger?}}$$

D'abord on vérifie que

$$H + \frac{\partial S}{\partial t} = H - P = P - P = \boxed{0 = K} \quad \text{OK}$$

$\uparrow$
 $= E = P$

En suite

$$Q = \frac{\partial S}{\partial P} = \pm \int_0^q \frac{\frac{1}{2} 2m}{\sqrt{2mP - m^2 \omega^2 q'^2}} dq' - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{m}{2P}} \int_0^q \frac{1}{\underbrace{\sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2P} q'^2}}_{< 1}} dq' - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, P)}{\partial P}$$

On substitue

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}}} q' \rightarrow dq' = \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m\omega^2}} \cos \theta d\theta$$

et donc on a

$$Q = \pm \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{P}}} \int_0^{\operatorname{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}}} q\right)} \frac{\sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m\omega^2}} \cos \theta}{\cos \theta} d\theta - t$$

$$= \pm \sqrt{\frac{m}{2\mathcal{P}}} \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m\omega^2}} \int_0^{\operatorname{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}}} q\right)} d\theta - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, \mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}}$$

$$= \pm \frac{1}{\omega} \operatorname{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}}} q\right) - t + \frac{\partial S_q(\bar{q}, \mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}}$$

Mais on sait que $Q(t)$ est constante, donc on peut le calculer au temps $t=0$

$$Q(0) = \pm \frac{1}{\omega} \operatorname{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}}} q(0)\right) + \frac{\partial S_q(\bar{q}, \mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}} = Q(t)$$

Donc

$$\pm \frac{1}{\omega} \operatorname{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}}} q(0)\right) + \frac{\partial S_q(\bar{q}, \mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}} = \pm \frac{1}{\omega} \operatorname{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}}} q(t)\right) + \frac{\partial S_q(\bar{q}, \mathcal{P})}{\partial \mathcal{P}} - t$$

elles viennent de C_2 , donc on peut négliger, comme prévu!

et alors

$$\operatorname{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}}} q(t)\right) = \operatorname{asin}\left(\sqrt{\frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}}} q(0)\right) \pm t\omega$$

D'où on tire

$$q(t) = q(0) \cos(\omega t) \pm \sqrt{\frac{2\mathcal{P}}{m\omega^2}} \sqrt{1 - \frac{m\omega^2}{2\mathcal{P}} q^2(0)} \sin(\omega t) =$$

$$= q(0) \cos(\omega t) \pm \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \sqrt{\mathcal{P} - \frac{1}{2} m\omega^2 q^2(0)} \sin(\omega t) =$$

$$= q(0) \cos(\omega t) \pm \sqrt{\frac{2}{m\omega^2}} \sqrt{\frac{\mathcal{P}^2(0)}{2m}} \sin(\omega t) = q(0) \cos(\omega t) \pm \frac{|p(0)|}{m\omega} \sin(\omega t)$$

car $\mathcal{P} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \text{const}$

↑ ambiguïté de signe à résoudre selon signe de $p(0)$

En suite il faut déterminer $p(t)$:

$$p(t) = \frac{\partial S}{\partial q} = \pm \sqrt{2mE - m^2 \omega^2 q^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{la dérivée par rapport} \\ \text{à } q \text{ du reste est nulle} \end{array} \right)$$

et donc

$$p(t) = \pm \sqrt{2m \left(\frac{p(0)^2}{2m} + \frac{1}{2} m^2 \omega^2 q(0)^2 \right) - m^2 \omega^2 q(0)^2 \cos^2(\omega t) - m^2 \omega^2 \frac{p(0)^2}{m^2 \omega^2} \sin^2(\omega t) + \pm 2m \omega q(0) |p(0)| \sin(\omega t) \cos(\omega t)} =$$

$$= \pm \sqrt{p(0)^2 \cos^2(\omega t) \mp 2m \omega q(0) |p(0)| \sin(\omega t) \cos(\omega t) + m^2 \omega^2 q(0)^2 \sin^2(\omega t)} =$$

$$= \pm |p(0)| \cos(\omega t) \mp m \omega q(0) \sin(\omega t)$$

Encore une fois on insiste que l'ambiguïté de signe est intrinsèque à la forme quadratique de l'énergie cinétique, et elle peut être résolue seulement par biais de la connaissance du signe de $p(0)$.

On peut un peu résumer ce qu'on a fait, et qui s'applique en générale lors qu'on fait Hamilton - Jacobi :

1) On écrit

$$H(\{q_i\}, \left\{ \frac{\partial S}{\partial q_i} \right\}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

2) On résout et on trouve

$$S(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$$

avec la relation

$$\{p_i\} = \{c_i\} \quad \text{constantes}$$

nécessaires à résoudre le problème et qui correspondent aux quantités conservées. Elles sont $2N$!

3) On trouve

$$Q_i = \frac{\partial S}{\partial p_i} = Q_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t)$$

mais

$$\dot{Q}_i = 0, \text{ donc}$$

$$Q_i(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = Q_i(\{q_i(0)\}, \{p_i\}, 0)$$

4) L'inversion de cette expression nous donne

$$q_i(t) = q_i(\{Q_i\}, \{p_i\}, t)$$

↑
donnés à partir
des conditions
initiales

↑
quantité conservées

elles sont
toutes
déterminées
à partir de
 $\{q_i(0)\}$ et
 $\{p_i(0)\}$

5) finalement on a

$$p_i(t) = \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i(\{q_i(t)\}, \{p_i\}, t)$$

On resume encore plus :

$$\begin{array}{ccc}
 H(\{q_i\}, \{p_i\}, t) & \xrightarrow{\text{transf. canonique qui depend de } t} & K(\{Q_i\}, \{p_i\}, t) = 0 \\
 \left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{p}_i = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q_i(t) = Q_i(0) \\ p_i(t) = p_i(0) \end{array} \right. \\
 & \xleftarrow{\text{transf. canonique inverse qui depend de } t} &
 \end{array}$$

Donc, on a en effet caché l'évolution temporelle du système dans la fonction génératrice, donc dans la transf. canonique.

Il n'est pas surprenant, car on sait que l'évolution du système est une transformation canonique.

On fait un pas en arrière pour discuter les conséquences de ce qu'on a fait.

Si on peut résoudre Hamilton-Jacobi, c'est à dire trouver S , alors il suffit de calculer Q_i et P_i at $t=0$, et en sachant qu'ils ne changent pas au cours du temps, par inversion de la transformation on trouve explicitement $q_i(t)$ et $p_i(t)$. On dit qu'on a résolu explicitement le système.

On se pose le problème inverse : pourrait-on résoudre explicitement le système, c'est-à-dire qu'on peut écrire

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(t, \{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \\ p_i(t) = p_i(t, \{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}) \end{cases}$$

mais pas résoudre l'éq. de Hamilton-Jacobi ?

En effet non !

Si on pouvait résoudre explicitement les équations canonique de Hamilton, on aurait en effet trouvé la transformation canonique explicite qui correspond à l'évolution du système.

Donc on aurait aussi, par inversion,

$$q_i(0) = q_i(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t) = Q_i$$

$$p_i(0) = p_i(\{q_i(t)\}, \{p_i(t)\}, t) = P_i$$

et on sait que, vu qu'il s'agit d'une transformation canonique, on peut trouver, par intégration, $F_2(\{q_i\}, \{P_i\}, t)$

Donc, on aurait trouvé une F_2 telle que

$$\begin{cases} \dot{Q}_i = 0 \\ \dot{P}_i = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad K(\{Q_i\}, \{P_i\}, t) = 0$$

↑ évident car les conditions initiales ne changent pas au cours du temps

Mais cette F_2 serait la solution de Hamilton-Jacobi.

D'autre côté, la théorie des eqs. différentielles aux dérivées partielles dit que pour résoudre Hamilton-Jacobi il est nécessaire d'avoir $3N$ constantes du mouvement.

Alors on peut trouver une solution explicite du mouvement (c'est à dire : $q_i(t)$ et $p_i(t)$ explicite) si et seulement si il existe au moins $3N$ constantes du mouvement.

Si elles n'existent pas, alors on ne peut pas avoir une solution explicite.

Attention! La solution des équations canoniques existe et elle est unique, car $\{q_i(0)\}$ et $\{p_i(0)\}$ sont connues. Tout simplement, on ne peut pas écrire une forme explicite

$$\begin{cases} q_i(t) = q_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}, t) \\ p_i(t) = p_i(\{q_i(0)\}, \{p_i(0)\}, t) \end{cases}$$

La conséquence est qu'on devra utiliser des solutions numériques.

Est-il commun d'avoir $3N$ constantes du mouvement ?

Intuitivement :

- si le système est isolé, H est conservée (1 qte conservée)
- si il y a invariance par translation, $\vec{P}$ (3 qtes conservées)
- si il y a invariance par rotation, $\vec{L}$ (3 qtes conservées)

Il est rare qu'on ait d'autres quantités (sauf pour des systèmes séparables, voir plus loin).

Donc, la plupart de systèmes avec plus que deux particules (donc avec $3N \geq 3 > 7 (= 1+3+3)$)

n'admettent pas de solution explicite (on dit qu'ils ne sont pas **intégrables**).

